Formeln und Notizen

Informationstheorie

Florian Franzmann*

7. April 2009, 23:53 Uhr

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

*siflfran@hawo.stw.uni-erlangen.de

Tabelle 1: Notation in der Informationstheorie

Symbol	Bedeutung
$\mathrm{P}(A)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \in H$
$H = \{\eta_i \mid i = 1, \dots, M_x\}$	Menge aller Elementarereignisse
η_i	Die einzelnen Elementarereignisse
$M_x = \lvert H \rvert$	Mächtigkeit von H

1. Informationstheorie

1.1. Eigenschaften von Informationsquellen

diskret — Die Quelle gibt zu diskreten Zeitpunkten $k \in \mathbb{Z}$ Symbole $\mathcal{X}[k]$ aus einem bekannten Symbolvorrat mit endlicher Mächtigkeit M_x ab. Die a-priori-Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}(X[k] = x_i) \quad i = 1(1)M_x \tag{1}$$

können dabei bekannt oder unbekannt sein.

gedächtnislos (DMS) Die a-priori-Wahrscheinlichkeiten der sind weder Funktion zuvor noch nachfolgend abgegebenen Symbole, die Symbole sind also statistisch unanbhängig und es gilt

$$\mathrm{P}\left(X[1] = x_1, \ldots, X[N] = x_{i_N}\right) = \prod_{n=1}^{N} \mathrm{P}\left(X[n] = x_{i_n}\right) \tag{2}$$

zeitinvariant Die a-priori-Wahrscheinlichkeiten sind zu allen Zeitpunkten gleich (i. i. d-Sequenz):

$$\mathrm{P}\left(X[k] = x_i\right) =: p_i \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Aus Zeitinvarianz folgt automatisch Gedächtnislosigkeit.

1.2. Informationsmaß

1.2.1. Forderungen an ein Informationsmaß

1. $I(x_i) \in \mathbb{R} \wedge I(x_i) \geq 0$
2. $I(x_i) = f(\mathrm{P}\left(X[k] = x_i\right))$
3. Für gedächtnislose Quellen soll gelten

$$I(x_{i_1}, \ldots, x_{i_N}) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{N} I(x_{i_n}) \tag{4}$$

$$f\left(\prod_{n=1}^{N} \mathrm{P}\left(X[n] = x_{i_n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{N} f(\mathrm{P}\left(X[n] = x_{i_n}\right)) \tag{5}$$

1.2.2. Informationsmaß nach Hartley

$$I_H = \log_b(M_x) \tag{6}$$

Es berücksichtigt die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Symbole nicht, genügt also der in 2 aufgestellten Forderung nicht.

1.2.3. Informationsmaß nach Shannon

$$I_S(x_i) = -\log_b(\mathrm{P}\left(X[k] = x_i\right)) \quad \underbrace{[\mathrm{bit}]}_{\text{für } b=2} \tag{7}$$

Maß für die Unsicherheit des Auftretens eines Quellensymbols.

1.2.4. Informationsgewinn

Reduktion der Unsicherheit des Ausgangs eines Zufallsexperiments durch Beobachtung.

1.3. Entropie

1.3.1. Entropie einer Informationsquelle

$$H(X) = \mathcal{E}\left\{I_S(X)\right\} \tag{8}$$

$$= -\sum_{i=1}^{M_x} p_i \mathrm{ld}(p_i) \left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{Symbol}}\right] \tag{9}$$

1.3.2. Schranken der Entropie einer diskreten, gedächtnislosen Quelle

$$0 \leq H(X) \leq \mathrm{ld}(M_x) \tag{10}$$

1.3.3. Maximum der Entropie

Die Entropie einer D. M. S. wird durch gleichverteilte Symbole maximiert.

1.3.4. Binäre Entropiefunktion

$$\mathrm{e}_2\left(x\right) = -x\mathrm{ld}(x) - (1-x)\mathrm{ld}(1-x) \tag{11}$$

1.4. Gekoppelte Informationsquellen

1.4.1. Verbundentropie

Mittlerer Informationsgewinn durch Beobachtung beider Quellen:

$$H(XY) := -\sum_{i=1}^{M_x}\sum_{j=1}^{M_y} \mathrm{P}\left(X = x_i \cap Y = y_i\right) \mathrm{ld}\left(\mathrm{P}\left(X = x_i \cap Y = y_i\right)\right) \quad \left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{Symbolpaar}}\right] \tag{12}$$

1.4.2. Bedingte Entropie

Mittlerer Informationsgewinn durch Beobachtung des Symbols X, wenn das Symbol $Y = y_i$ bereits bekannt ist:

$$H(X|Y) := \sum_{j=1}^{M_y} \mathrm{P}\left(Y = y_i\right) \cdot H(X|y_i) \tag{13}$$

$$= -\sum_{i=1}^{M_x}\sum_{j=1}^{M_y} \mathrm{P}\left(X = x_i \cap Y = y_i\right) \mathrm{ld}\left(\mathrm{P}\left(X = x_i | Y = y_i\right)\right) \tag{14}$$

Analog gilt

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{M_x}\sum_{j=1}^{M_y} \mathrm{P}\left(X = x_i \cap Y = y_i\right) \cdot \mathrm{ld}(\mathrm{P}\left(Y = y_j | X = x_i\right)) \tag{15}$$

1.4.3. Satz über die Beobachtung

Eine zusätzliche Beobachtung kann *im Mittel* die Unsicherheit nie vergrößern, d. h.

$$H(X) \geq H(X|Y) \tag{16}$$

wobei Gleichheit gilt, wenn X und Y statistisch unabhängig sind, also

$$\mathrm{P}\left(X \cap Y\right) = \mathrm{P}\left(X\right) \cdot \mathrm{P}\left(Y\right) \tag{17}$$

1.4.4. Kettenregel der Verbundentropie

$$H(XY) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) \tag{18}$$

Die Unsicherheit bezüglich beider Zufallsvariablen ist im Mittel gleich der Summe der Unsicherheiten bezüglich der einen Zufallsvariable und der anderen Zufallsvariable unter der Bedingung, daß die erste bereits bekannt ist.

1.4.5. Obere Grenze der Verbundentropie

Die Verbundentropie ist im Mittel nicht größer als die Summe der Entropien der Einzelquellen

$$H(XY) \geq H(X) + H(Y) \tag{19}$$

Gleichheit gilt bei statistisch unabhängigen Quellen.

1.4.6. Individuelle wechselseitige Information

$$I_M(x_i, y_i) := \mathrm{ld}\left(\frac{\mathrm{P}\left(X = x_i | Y = y_i\right)}{\mathrm{P}\left(X = x_i\right)}\right) = I_M(y_i, x_i) \tag{20}$$

1.4.7. Mittlere wechselseitige Information

Wird manchmal auch als *Transinformation* bezeichnet.

$$\begin{aligned}
I(X;Y) &= \mathcal{E}\left\{I_M(X;Y)\right\} && (21)\\
&= \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} \mathrm{P}\left(X = x_i; Y = y_i\right) \cdot \mathrm{ld}\left(\frac{\mathrm{P}\left(X = x_i | Y = y_i\right)}{\mathrm{P}\left(X = x_i\right)}\right) && (22)\\
&= \underbrace{H(X)}_{\text{a priori}} - \underbrace{H(X|Y)}_{\text{a posteriori}} && (23)\\
I(Y;X) &= \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} \mathrm{P}\left(X = x_i; Y = y_i\right) \cdot \mathrm{ld}\left(\frac{\mathrm{P}\left(Y = y_i | X = x_i\right)}{\mathrm{P}\left(Y = y_i\right)}\right) && (24)\\
&= H(Y) - H(Y|X) && (25)\\
I(X;Y) &= H(X) + H(Y) - H(XY) && (26)
\end{aligned}$$

1.4.8. Eigenschaften der mittleren wechselseitigen Information

Die mittlere wechselseitige Information ist nicht negativ

$$I(X;Y) \geq 0 \tag{27}$$

und nur dann 0, wenn X und Y statistisch unabhängig sind.

1.4.9. Bedingte mittlere wechselseitige Information

$$\begin{aligned} I(X;Y|Z) &:= H(X|Z) - H(X|YZ) && (28) \\ &= H(Y|Z) - H(Y|XZ) && (29) \end{aligned}$$

1.4.10. Kettenregel der wechselseitigen Information

$$I((X_1, X_2); Y) = I(X_1; Y) + I(X_2; Y|X_1) \tag{30}$$

Der Informationsgewinn durch die Beobachtung von Y in Bezug auf (X_1, X_2) ist gleich dem Informationsgewinn aufeinanderfolgender Beobachtungen.

1.4.11. Data Processing Theorem

Durch Verarbeitung von Information kann nie Information dazugewonnen werden.

$$I(X;Z) \leq I(X;Y) \tag{31}$$

$$I(X;Z) \leq I(Y;Z) \tag{32}$$

1.5. Diskrete gedächtnisbehaftete Quelle

1.5.1. Stationarität

Eine gedächtnisbehaftete Quelle wir als stationär bezeichnet, wenn die Wahrscheinlichkeiten für Wörter von Quellensymbolen der Länge $L \in \mathbb{N}$ für alle Zeitpunkte gleich sind:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(X[k+1], X[k+2], \ldots, X[k+L]\right) \\ &\qquad = \mathrm{P}\left(X[1], X[2], \ldots, X[L]\right) \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \wedge \forall L \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

1.5.2. Entropie

Der mittlere Informationsgehalt je Symbol für als unabhängig angenommene Blöcke $\vec{X}$ der Länge L:

$$\begin{aligned} H_L(X) := -\underbrace{\frac{1}{L}}_{1} \sum_{i_1=1}^{M_x} \sum_{i_2=1}^{M_x} \cdots \sum_{i_L=1}^{M_x} \mathrm{P}\left(X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \ldots, X_L = x_{i_L}\right) && (33) \\ \cdot\ \mathrm{ld}(\mathrm{P}\left(X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \ldots, X_L = x_{i_L}\right)) && (34) \\ := \frac{1}{L} H(X_1, X_2, \ldots, X_L) && (35) \end{aligned}$$

Tabelle 2: Notation der Codierung

Symbol	Bedeutung
$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{M_c}\}$	Codesymbolvorrat
$M_c = \lvert\mathcal{C}\rvert$	Codesymbolumfang
C	Menge der vereinbarten Codewörter – Code
$K = \lvert C\rvert \leq \lvert\mathcal{C}\rvert^N$	Anzahl der vereinbarten Codewörter
$\mathcal{X}^L \mapsto C$	Codierung

Die Entropie einer stationären, gedächtnisbehafteten, diskreten Quelle ist die bedingte Entropie des aktuellen Symbols bei Kenntnis aller vorangegangenen Symbole:

$$H(\langle X\rangle) = \lim_{L\to\infty} H_L(X) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}\right] \tag{36}$$

$$= \lim_{L\to\infty} H(X_L|X_1X_2\ldots X_{L-1}) \tag{37}$$

$$= \lim_{L\to\infty} H(X_1X_2\ldots H_L) - H(X_1X_2\ldots X_{L-1}) \tag{38}$$

1.5.3. Gedächtnis vermindert Entropie

Durch statistische Abhängigkeit innerhalb der von einer stationären Quelle abgegebenen Symbolsequenz kann die Entropie nur abnehmen:

$$H_{L+1}(X) \leq H_L(X) \quad \forall L \in \mathbb{N} \tag{39}$$

Gleichheit gilt nur für Gedächtnislose Quellen.

1.6. Codierung für diskrete Informationsquellen

1.6.1. Eindeutige Decodierbarkeit

Eine Codierung ist eindeutig decodierbar, wenn für alle möglichen unterschiedlichen Sequenzen von Quellensymbolen die zugeordneten Sequenzen von Codesymbolen ebenfalls verschieden sind.

[1] Länge der Quellensymbolblöcke

1.6.2. Vollständiger Baum

Ein bis zur Tiefe n vollständiger M-wertiger Baum besitzt bei den Tiefen $k = 1(1)n$ jeweils M^k Knoten.

1.6.3. Präfixfreier Code

Bei einem präfixfreien Code C mit variabler Wortlänge werden die $K = |C|$ Codewörter nur durch Pfade von der Wurzel zu Endknoten (bei unterschiedlichen Tiefen) repräsentiert. Zwischenknoten sind dagegen keine Codewörter zugeordnet.

1.6.4. Kraft'sche Ungleichung

Ein präfixfreier Code C existiert über einem M-wertigen Alphabet mit Wortlängen $n_1, \ldots, n_K$ genau dann, wenn folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{M^{n_i}} \leq 1 \tag{40}$$

1.6.5. Satz von McMillan

Jeder eindeutig decodierbare Code mit K Wörtern und variabler Wortlänge über einem M-wertigen Alphabet erfüllt die Kraft'sche Ungleichung.

Präfixfreie Codes sind *optimal* decodierbare Codes mit variabler Wortlänge.

1.6.6. Quellencodierungstheorem für Codes mit variabler Wortlänge

Die Symbole, die von einer diskreten, gedächtnislosen Quelle mit Entropie $H(X)$ abgegeben werden, können umkehrbar eindeutig durch die Wörter eines eindeutig decodierbaren Codes C mit variabler Wortlänge über einem M_c-wertigen Alphabet repräsentiert werden, d. h. es existiert eine Bijektion

$$\mathcal{X} \leftrightarrow C \tag{41}$$

wobei für die mittlere Codewortlänge

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{M_x} n_i \cdot \mathrm{P}\left(X = x_i\right) \tag{42}$$

gilt

$$\frac{H(X)}{\mathrm{ld}(M_c)} \leq \bar{n} \leq \frac{H(X)}{\mathrm{ld}(M_c)} + 1 \tag{43}$$

Im Spezialfall $M_c = 2$ gilt

$$H(X) \leq \bar{n} \leq H(X) + 1 \tag{44}$$

1.6.6.1. Optimale Wortlänge eines Codes

$$n_i = -\log_{M_c}\left(\mathrm{P}\left(X = x_i\right)\right) \tag{45}$$

1.6.6.2. Codierung nach Shannon und Fano Wähle die Codewortlänge nach Gleichung (45) und konstruiert einen präfixfreien Code gemäß 1.6.4 auf der vorherigen Seite. Das Ergebnis ist meist nicht optimal.

1.6.6.3. Quellencodierungstheorem für diskrete Quellen bei Codierung mit variabler Länge Für diskrete Informationsquellen mit mittlerem Informationsgehalt $H(\langle X \rangle)$ je Symbol existiert eine M_c-wertige umkehrbar eindeutige Codierung, für deren mittlere Wortlänge $\bar{n}$ gilt

$$\frac{H(\langle X \rangle)}{\mathrm{ld}(M_c)} \leq \bar{n} < \frac{H_L(X)}{\mathrm{ld}(M_c)} + \frac{1}{L} \tag{46}$$

Das heißt, daß das Shannon'sche Informationsmaß den Informationsgehalt eines Symbols genau trifft.

Um die Entropie möglichst nahe zu erreichen müssen möglichst lange Blöcke der Codierung zugeführt werden.

1.6.7. Redundanz eines Codes mit variabler Länge

Für das Quellenwort $\vec{x}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,L})$ der Länge L, dem ein Codewort der Länge n_i zugeordnet wird, beträgt die individuelle Redundanz

$$\rho_i := n_i \cdot \mathrm{ld}(M_c) - \mathrm{ld}\left(\frac{1}{\mathrm{P}\left(\vec{X} = \vec{x}_i\right)}\right) \tag{47}$$

1.6.7.1. Mittlere Redundanz eines Quellencodes

$$\rho_c := \mathcal{E}\{\rho_i\} = \mathrm{ld}(M_c) \cdot \bar{n}_L - L \cdot H_L(X) \tag{48}$$

Gemäß Quellcodierungstheorem kann zwar eine beliebig kleine mittlere Redundanz $\frac{\rho_c}{L}$ je Quellensymbol erreicht werden, eine mittlere Redundanz kann jedoch nie negativ sein.

1.6.8. Optimale Quellencodierung mit variabler Wortlänge

1.6.8.1. Pfadlängenlemma nach Massey Die mittlere Wortlänge $\bar{n}$ eines präfixfreien Codes mit variabler Länge ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Zwischenknoten einschließlich der Wurzel in dem Baum, der den Code repräsentiert.

1.6.8.2. Satz über unbenutzte Endknoten Im Codebaum eines optimalen präfixfreien Codes mit variabler Wortlänge treten unbenutzte Endknoten nur beid er größten Tiefe $N = \max_i n_i$ auf. Die Zahl der hier unbenutzten Endknoten ist minimal 0 und maximal $M_c - 2$. Alle Zweige zu unbenutzten Endknoten können so gewählt werden, daß sie von *einem* Zwischenknoten bei Tiefe $N - 1$ ausgehen.

Bei *binären* optimalen Codes gibt es folglich keine unbesetzten Endknoten.

1.6.8.3. Konstruktion binärer Codes nach Huffman

1. Zuweisung der a-priori-Wahrscheinlichkeiten $p_i = \mathrm{P}\left(X = x_i\right)$ zu M_x Endknoten.
2. Für $k = 1(1)(M_x - 1)$: Die beiden Knoten mit den kleinsten Wahrscheinlichkeiten werden jeweils über Zweige zu einem neuen Zwischenknoten zusammengeführt.

1.6.8.4. Konstruktion mehrstufiger Codes nach Huffman

1. Zuweisung der a-priori-Wahrscheinlichkeiten zu M_x Endknoten.
2. Zusammenfassen der m Endknoten $(1 < m \leq M_c)$ mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten zu einem Zwischenknoten in der Weise, daß die verbleibende Zahl $M_x - m + 1$ von Knoten die Gleichung

$$M_x - m + 1 = M_c + b \cdot (M_c - 1) \text{ für } b \in \mathbb{N} \tag{49}$$

erfüllt, damit keine weiteren Zweige ungenutzt bleiben.

$$m = (M_x - M_c) \mod (M_c - 1) + 1 \tag{50}$$

Für $m = 1$ entfällt Schritt 2.

3. Für $k = 1(1)\left(\frac{M_x - m + 1}{M_c - 1}\right)$:
   Zusammenfassen der M_c Knoten mit geringster Wahrscheinlichkeit.

1.6.9. Blockcodierung für diskrete gedächtnislose Quellen mit Codewörtern variabler Länge

1.6.9.1. Tunstall-Codierung

1. Bestimme die maximale Zahl von Quellenwörtern

$$b \left\lfloor \frac{M_c^N - M_x}{M_x - 1} \right\rfloor \tag{51}$$

2. Konstruiere einen M_x-wertigen Baum, wobei ausgehend von der Wahrscheinlichkeit 1 den Folgeknoten Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Jeder Folgeknoten erhält die Wahrscheinlichkeit des Ausgangsknotens multipliziert mit der a-priori-Wahrscheinlichkeit des dem Zweig zugeordneten Quellensymbols. Bei gedächtnisbehafteten Quellen ist mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten zu multiplizieren.

1.6.9.2. Quellencodierungstheorem für Quellenwörter variabler Länge Es werden Wörter unterschiedlicher Länge l_j aus M_x-wertigen Symbolen, die eine gedächtnislose Quelle mit der Entropie $H(X)$ abgibt, $M_c^N \geq M_x$ Codewörtern eines Blockcodes der Länge N über einem M_c-wertigen Codesymbolalphabet zugeordnet.

Es gibt eine solche Codierung, bei der für das Verhältnis von Codewortlänge N zu mittlerer Quellenwortlänge $\bar{l} = \sum_{j=1}^{M_c^N} l_j \cdot \mathrm{P}(\vec{c}_j)$ gilt

$$\frac{H(X)}{\mathrm{ld}(M_c)} \leq \frac{N}{\bar{l}} < \frac{H(X)}{\mathrm{ld}(M_c)} + \frac{\mathrm{ld}\left(\frac{2}{p_{\min}}\right) \cdot \mathrm{ld}(M_x)}{(N \cdot \mathrm{ld}(M_c) - \mathrm{ld}(M_x)) \cdot \mathrm{ld}(M_c)} \tag{52}$$

mit $p_{\min} = \min_i \mathrm{P}(X = x_i)$. Es gibt *keine* solche Codierung, daß

$$\frac{N}{\bar{l}} < \frac{H(X)}{\mathrm{ld}(M_c)} \tag{53}$$

1.6.9.3. Universelle Quellencodierung nach Lempel und Ziv

- Benötigt keine Kenntnis der Quellenstatistik.
- Ist selbstlernend.
- Ist für alle diskreten Quellen geeignet.

1. Initialisierung:

   Eintragung der M_x unterschiedlichen Quellensymbole auf den Positionen 0 bis $M_x - 1$ des Quellenwortbuches und Markierung der zugehörigen Knoten auf Tiefe 1 im M_x-wertigen Baum mit zugehöriger Quellenwortposition.

2. Lernphase:

   a) Verfolgung der Quellensymbolfolge im Baum von der Wurzel bis zum bisher bei größter Tiefe markierten Knoten.

   b) Übertragung der Quellenwortnummer für diesen Knoten mittels n Codesymbolen und zusätzlich $\lceil \log_{M_c}(M_x) \rceil$ Codesymbolen zur Spezifikation des nachfolgenden Quellensymbols, das sogenannte Abschlußsymbol.

   c) Sende- und empfangsseitige Eintragung der Kombinationen aus bisherigem Quellensymbolwort und Abschlußsymbol auf der nächsten freien Position im Quellenwortbuch. Markierung des zugehörigen Knotens im Baum mit Positionsnummer.

   d) Wiederholung der Lernschritte, bis alle M_c Positionen im Quellenwortbuch besetzt sind.

3. Arbeitsphase:

   Entspricht der Lernphase, jedoch ohne Neueintrag von Quellenwörtern ins Buch.

1.6.9.4. Runlength-Limited-Codierung für Binärsequenzen Repräsentation binärer Symbolsequenzen $\langle X[k] \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, $X[k] \in \{0; 1\}$ wird umkehrbar eindeutig repräsentiert durch Symbolabstände $\nu \in \mathbb{N}$ für das Symbol 1 (*Runlength-Codierung*).

Im Mittel werden $\frac{1}{\mathrm{P}(X=1)}$ Binärsymbole durch einen Symbolabstand repräsentiert.

Bei *Runlength-Limited-Codierung* werden Symbolabstände $\nu \leq N$ direkt, Symbolabstände $\nu > N$ durch $\left\lfloor \frac{\nu-1}{N} \right\rfloor$ offene Symbole der Länge N und einen Symbolabstand $(\nu-1) \bmod (N+1)$ repräsentiert.

1.7. Blockcodierung für Quellenwörter mit fester Länge

1.7.1. Unvollständige Codierung

Nur für typische Sequenzen von Quellensymbolen werden Codewörter bereitgestellt. Tritt ein untypisches Quellenwort auf, so wird ein Codierversagen angenommen.

1.7.2. ε-typische Sequenzen

Eine Symbolsequenz der Länge L einer D. M. S. heißt ε-typisch ($\varepsilon \in [0; 1]$), falls gilt

$$(1-\varepsilon)\mathrm{P}\left(X = x_i\right) \leq \frac{n_i}{L} \leq \mathrm{P}\left(X = x_i\right)(1+\varepsilon) \forall i \in \{1; \ldots; M_x\} \tag{54}$$

bzw.

$$\left|\frac{n_i}{L} - \mathrm{P}\left(X = x_i\right)\right| \leq \varepsilon \cdot \mathrm{P}\left(X = x_i\right) \forall i \in \{1; \ldots; M_x\} \tag{55}$$

also falls sich die relativen Häufigkeiten $\frac{n_i}{L}$ für alle Symbole um weniger als $\varepsilon \cdot \mathrm{P}\left(X = x_i\right)$ von den Wahrscheinlichkeiten unterscheiden.

1.7.3. Satz über die Wahrscheinlichkeit ε-typischer Sequenzen

Falls eine Quellensymbolsequenz $\vec{X}$ der Länge L, die von einer D. M. S. abgegeben wird ε-typisch ist, gilt

$$2^{-(1+\varepsilon)\cdot L \cdot H(X)} \leq \mathrm{P}\left(\vec{X}\right) \leq 2^{-(1-\varepsilon)\cdot L \cdot H(X)} \tag{56}$$

1.7.4. Codierversagen

Ein Codierversagen ist das Ereignis $\mathcal{F}_i$, daß die Sequenz $\vec{X}$ nicht ε-typisch bezüglich Symbol x_i ist, d. h.

$$\mathrm{P}\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathrm{P}\left(\left|\frac{n_i}{L} - \mathrm{P}\left(X = x_i\right)\right| > \varepsilon \cdot \mathrm{P}\left(X = x_i\right)\right) \tag{57}$$

1.7.5. Wahrscheinlichkeit eines Codeversagens

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{fail}\right) < \mathrm{const.} \cdot \frac{1}{L} \tag{58}$$

$$\mathrm{P}\left(\mathcal{F}\right) < M_x \cdot \frac{1}{L \cdot \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{p_{\min}} \text{ mit } p_{\min} = \min_i \left(\mathrm{P}\left(X = x_i\right)\right) > 0 \tag{59}$$

1.7.6. Zahl typischer Symbolsequenzen

Die Zahl ε-typischer Sequenzen der Länge L, die von einer M_x-wertigen D. M. S. mit Entropie $H(X)$ abgegeben werden, wird begrenzt durch

$$\left(1 - M_x \cdot \frac{1}{L \cdot \varepsilon^2 p_{\min}}\right) \cdot 2^{(1-\varepsilon)\cdot L\cdot H(X)} \leq T \leq 2^{(1+\varepsilon)\cdot L\cdot H(X)} \tag{60}$$

1.7.7. Quellencodierungstheorem für Quellen- und Codewörter mit festen Wortlängen

Für eine zeitinvariante D. M. S. mit der Entropie $H(X)$ gibt es eine M_c-wertige Blockcodierung mit der Wortlänge N dergestalt, daß je L Quellensymbole N Codiersymbolen zugeordnet werden, wobei gilt

$$\frac{N}{L} < \frac{H(X)}{\mathrm{ld}(M_c)} + \frac{\varepsilon_1}{L} \tag{61}$$

mit $\varepsilon_1 > 0$ und dabei die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(\mathcal{F})$, daß Codierversagen auftritt begrenzt wird durch

$$\mathrm{P}(\mathcal{F}) \leq \frac{\varepsilon^2}{L} \tag{62}$$

mit $\varepsilon_2 > 0$.

1.8. Übertragungskanäle

Derjenige Teil eines Informationsübertragungssytems, den der Entwerfer des Systems so hinzunehmen hat, wie er ist.

1.8.1. Gedächtnisloser Kanal (D. M. C.)

Ein diskreter Kanal heißt gedächtnislos, wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(Y_k|X_k)$ für die Ausgangssymbole Y_k bezüglich der Eingangssymbole X_k (*Übergangswahrscheinlichkeiten*) zum diskreten Zeitpunkt k nicht von Ein- und Ausgangssymbolen zu anderen Zeitpunkten abhängen.

1.8.2. Zeitinvarianter Kanal

Ein diskreter Kanal ist zeitinvariant, falls gilt

$$\mathrm{P}(Y_k|X_k) = \mathrm{P}(Y|X)\, \forall k \in \mathbb{Z} \tag{63}$$

Ein zeitinvarianter Kanal ist *immer* gedächtnislos.

1.8.3. Rückwirkungsfreier Kanal

Ein Kanal heißt rückwirkungsfrei genau dann, wenn seine Ausgangssymbole die am Kanal anliegende Informationsquelle nicht beeinflussen.

1.8.4. Signalstörleistungsverhältnis

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mathcal{E}\left\{|A_i^2|\right\}}{\sigma_n^2} \tag{64}$$

1.8.5. Kanalkapazität

Der Maximalwert der Transinformations über optimiert über alle Größen, die der Entwickler beeinflussen kann wird als Kanalkapazität

$$C = \max I(X;Y) \left[\frac{\text{bit}}{\text{Kanalbenutzung}}\right] \tag{65}$$

bezeichnet.

Bei einem D. M. C. wir die Transinformation ausschließlich für statistisch unabhängige Ereignisse maximiert. $\Rightarrow$ D. M. S.

1.8.6. Symmetrische diskrete gedächtnislose Kanäle

1.8.6.1. Gleichmäßig streuende Kanäle Ein zeitinvarianter D. M. C. heißt *gleichmäßig streuend*, wenn für alle Eingangssymbole x_i die Streuwahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}\left(Y = y_i | X = x_i\right)$ Permutationen einer Streuverteilung

$$\vec{s} = (s_1, \ldots, s_{M_y}) \text{ mit } \sum_{j=1}^{M_y} s_j = 1 \tag{66}$$

darstellt.

Die Zeilenvektoren der Übergangsmatrix K gehen also durch Permutation auseinander hervor.

1.8.6.2. Satz über die Streuentropie Beim gedächtnislosen gleichmäßig streuenden Kanal gilt

$$H(Y|X) = -\sum_{j=1}^{M_y} s_j \mathrm{ld}(s_j) \tag{67}$$

1.8.6.3. Kapazität Für gleichmäßig streuende D. M. C. gilt

$$C = \max_{\mathrm{P}(X)} H(Y) + \sum_{j=1}^{M_y} s_j \mathrm{ld}(s_j) \tag{68}$$

A. Mathematische Grundlagen

A.1. Frequenz

A.1.1. Definition

$$f := \frac{1}{T} \tag{69}$$

T ist die Periode der Schwingung.

Tabelle 3: Teile von Einheiten

Bezeichnung	Präfix	Faktor	Faktor^2	Faktor^3
yotto	y	10^{-24}	10^{-48}	10^{-72}
zepto	z	10^{-21}	10^{-42}	10^{-63}
atto	a	10^{-18}	10^{-36}	10^{-54}
femto	f	10^{-15}	10^{-30}	10^{-45}
pico	p	10^{-12}	10^{-24}	10^{-36}
nano	n	10^{-9}	10^{-18}	10^{-27}
micro	μ	10^{-6}	10^{-12}	10^{-18}
milli	m	10^{-3}	10^{-6}	10^{-12}
centi	c	10^{-2}	10^{-4}	10^{-8}
deci	d	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}

Tabelle 4: Vielfache von Einheiten

Bezeichnung	Präfix	Faktor	Faktor^2	Faktor^3
Deka	da	10^1	10^2	10^3
Hekto	h	10^2	10^4	10^6
Kilo	k	10^3	10^6	10^{12}
Mega	M	10^6	10^{12}	10^{18}
Giga	G	10^9	10^{18}	10^{27}
Tera	T	10^{12}	10^{24}	10^{36}
Peta	P	10^{15}	10^{30}	10^{45}
Exa	E	10^{18}	10^{36}	10^{54}
Zeta	Z	10^{21}	10^{42}	10^{63}
Yotta	Y	10^{24}	10^{48}	10^{72}

A.1.2. Kreisfrequenz

$$\omega := 2\pi f \tag{70}$$

A.1.3. Normierte Kreisfrequenz

$$\Omega := \frac{\omega}{f_\mathrm{a}} \tag{71}$$

f_a ist die Abtastfrequenz.

A.1.4. Die z-Ebene

$$z := \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega} \tag{72}$$

A.2. Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{73}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{falls } b^2 - 4ac \geq 0 \\ \dfrac{-b \pm \mathrm{j}\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} & \text{falls } b^2 - 4ac < 0 \end{cases} \tag{74}$$

A.3. Geradengleichung

A.3.1. Gerade durch einen Punkt $P(x_0, y_0)$ mit Steigung m

$$y = m(x - x_0) + y_0 \tag{75}$$

A.3.2. Gerade durch die Punkte $P(x_0, y_0)$ und $A(x_1, y_1)$

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) \text{ mit } x_1 \neq x_0 \tag{76}$$

A.3.3. Parameterform

$$x = x_0 + t\cos\alpha \tag{77}$$

$$y = y_0 + t\sin\alpha \tag{78}$$

mit $t \in \left]-\infty, \infty\right[$.

A.3.4. Allgemeine Form der Geradengleichung

$$Ax + By + C = 0 \tag{79}$$

cot

tan

sin

cos

Abbildung 1: Trigonometrische Funktionen

Tabelle 5: Trigonometrische Funktionen – Funktionswerte besonderer Winkel

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	Quadrant			
φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	I	II	III	IV
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\varphi$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert	0	nicht definiert	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot\varphi$	nicht definiert	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	nicht definiert	0	$+$	$-$	$+$	$-$

A.4. Additionstheoreme

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \tag{80}$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \tag{81}$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)) \tag{82}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \tag{83}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \tag{84}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 1-\cos^2\alpha \tag{85}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \tag{86}$$

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}} \tag{87}$$
$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2} \tag{88}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha \tag{89}$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha - \mathrm{j}\sin\alpha \tag{90}$$

A.5. Rechenregeln des Logarithmus

$$\log_b(u\cdot v) = \log_b u + \log_b v \qquad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v \tag{91}$$
$$\log_b u^z = z\cdot\log_b u \qquad \log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\cdot\log_b u \tag{92}$$

A.6. Differentiation

A.6.1. Regeln

A.6.1.1. Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \tag{93}$$

A.6.1.2. Kettenregel

$$(u(v(x)))' = u'(v(x))\cdot v'(x) \tag{94}$$

A.6.1.3. Produktregel

$$(u(x)\cdot v(x))' = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x) \tag{95}$$

A.6.1.4. Logarithmische Differentiation

$$y = u(x)^{v(x)} \text{ mit } u(x) > 0 \tag{96}$$

$$\Rightarrow y' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right) \tag{97}$$

A.6.1.5. Differentiation eines parameterabhängigen Integrals

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t,x) \, \mathrm{d}t = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \, \mathrm{d}t + f(b(x),x) \cdot b'(x) - f(a(x),x) \cdot a'(x) \tag{98}$$

A.6.1.6. l'Hospital'sche Regel

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)} \tag{99}$$

A.6.2. Operatoren

A.6.2.1. Laplace-Operator Δ

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{100}$$

$$= \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Hess}_f\left(\vec{x}\right)\right) \tag{101}$$

$$= \nabla \cdot \nabla f \tag{102}$$

A.6.2.2. Divergenz-Operator div

Definition

$$\mathrm{div} f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \mathrm{Sp}(J_{\vec{v}}) = \nabla \cdot f \tag{103}$$

Rechenregeln

$$\nabla \cdot (\phi \vec{v}) = (\nabla \phi) \cdot \vec{v} + \phi (\nabla \vec{v}) \tag{104}$$

$$\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w}) \tag{105}$$

A.6.2.3. Gradient-Operator ∇

Definition

$$\mathrm{grad} f := \nabla f = \left(f_{x_1}, \cdots, f_{x_n}\right)^T \tag{106}$$

Rechenregeln

$$\nabla(A+B) = \nabla A + \nabla B \tag{107}$$

$$\nabla(A \circ B) = \nabla \overset{\downarrow}{A} \circ B + \nabla A \circ \overset{\downarrow}{B} \tag{108}$$

Hierbei bedeutet „$\circ$" eines der Produkte „$\cdot$", „$\times$" oder „$\otimes$" und „$\overset{\downarrow}{A}$" bedeutet, daß ∇ nur auf A angewandt wird. Damit folgt:

$$\nabla(\phi\psi) = \phi(\nabla\psi) + (\nabla\phi)\psi \tag{109}$$

$$\nabla(\phi\vec{v}) = \vec{v} \otimes (\nabla\phi) + \phi(\nabla\vec{v}) \tag{110}$$

$$\nabla(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\nabla\vec{v})^T\vec{w} + (\nabla\vec{w})^T\vec{v} \tag{111}$$

$$\nabla\cdot(\phi f) = (\nabla\phi)\cdot f + \phi\nabla\cdot f \tag{112}$$

A.6.2.4. Rotations-Operator

Definition

$$\mathrm{rot}\vec{V} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{V} \tag{113}$$

Rechenregeln

$$\nabla \times (\phi\vec{v}) = (\nabla\phi) \times \vec{v} + \phi(\nabla \times \vec{v}) \tag{114}$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\nabla\cdot\vec{w})\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{w}} - (\nabla\cdot\vec{v})\vec{w} - \frac{\partial\vec{w}}{\partial\vec{v}} \tag{115}$$

Hierbei ist $\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{w}}$ die Richtungsableitung von $\vec{v}$ in Richtung von $\vec{w}$, d. h. $\frac{\partial}{\partial\vec{w}} = \vec{w}\cdot\nabla$.

A.6.2.5. Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix)

$$\nabla\vec{f} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}} = J\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \vec{f} \otimes \nabla \tag{116}$$

A.6.2.6. Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}_\phi(\vec{x}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2\partial x_3} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \tag{117}$$

$$= \mathrm{grad}(\mathrm{grad}\phi) = \nabla \otimes \nabla\phi \tag{118}$$

A.6.2.7. Zusammengesetzte Operationen

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \tag{119}$$

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \tag{120}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta\vec{v} \tag{121}$$

A.7. Integrationsregeln

A.7.1. Partielle Integration

$$\int u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \tag{122}$$

A.7.2. Substitutionsregel

$x = u(t)$ bzw. $t = v(x)$. u und v seien zueinander Umkehrfunktionen.

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(u(t))u'(t)\ \mathrm{d}t \text{ bzw.} \tag{123}$$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{f(u(t))}{v'(u(t))}\ \mathrm{d}t \tag{124}$$

A.7.3. Logarithmische Integration

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \tag{125}$$

$$\int f'(x) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot f^2(x) + c \tag{126}$$

A.7.4. Integration der Umkehrfunktion

u und v seien zueinander Umkehrfunktionen. Dann ist

$$\int u(x)\ \mathrm{d}x = xu(x) - F(u(x)) + c_1 \tag{127}$$

mit

$$F(x) = \int v(x)\ \mathrm{d}x + c_2 \tag{128}$$

Tabelle 6: Potenzen der imaginären Einheit

n	0	1	2	3
$\mathrm{j}^{(n \mod 4)}$	1	j	−1	−j

A.8. Komplexe Zahlen

$$z = a + \mathrm{j}b \tag{129}$$
$$= \rho(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \tag{130}$$

$$\arg z = \varphi + 2k\pi \quad (-\pi < \varphi \leq +\pi \wedge k \in \mathbb{Z}) \tag{131}$$

$$a = \rho\cos\varphi \tag{132}$$
$$b = \rho\sin\varphi \tag{133}$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{134}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{a}{\rho} & \text{für } b \geq 0 \wedge \rho > 0 \\ -\arccos\frac{a}{\rho} & \text{für } b < 0 \wedge \rho > 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } \rho = 0 \end{cases} \tag{135}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{für } a > 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0 \wedge b < 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0 \wedge b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0 \wedge b < 0 \end{cases} \tag{136}$$

$$z = \rho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{137}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \tag{138}$$

$$\mathrm{e}^{a+\mathrm{j}b} = \mathrm{e}^a \cdot \cos b + \mathrm{j}\mathrm{e}^a \cdot \sin b \tag{139}$$

A.8.1. Komplexe Wurzel

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right)\right) \tag{140}$$

mit $k = 0, \ldots, n-1$ und $\psi = \arg(z)$.

Tabelle 7: Bekannte Reihen

	Formel	Anmerkung
[2]	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	divergiert
[3]	$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$	$\frac{1}{1-q}$ falls $\lvert q \rvert < 1$
	$\sum_{k=k_0}^{k_1} q^k$	$\frac{q^{k_0} - q^{k_1+1}}{1-q}$
	$\sum_{(-1)^n}^{n}$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	$\frac{\pi}{6}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	konvergiert für $\alpha > 1$
	$\sum_{n=1}^{m} n$	$\frac{m \cdot (m+1)}{2}$
	$\sum_{n=1}^{m} n^2$	$\frac{m \cdot (m+1) \cdot (2n+1)}{6}$

A.9. Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{141}$$

A.9.1. Reihen

Für konvergente Reihen gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{142}$$

[2] Harmonische Reihe
[3] Geometrische Reihe

A.10. Abschätzung mittels Union-Bound

$$\mathrm{P}\left(A \cup B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) + \mathrm{P}\left(B\right) - \mathrm{P}\left(A \cap B\right) \leq \mathrm{P}\left(A\right) + \mathrm{P}\left(B\right) \tag{143}$$

A.11. Bessel-Funktion erster Art

A.11.1. Definition

$$J_\nu(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\eta \sin x - \nu x)} \, \mathrm{d}x \tag{144}$$

$$\approx \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \text{ falls } x \ll 1 \tag{145}$$

A.11.2. Eigenschaften

- n gerade $\Rightarrow J_n(x) = J_n(-x) = J_{-n}(x) = J_{-n}(-x)$
- n ungerade $\Rightarrow J_n(x) = -J_n(-x) = -J_{-n}(x) = J_{-n}(x)$

Literatur

[1] Furlan, Peter: *Das Gelbe Rechenbuch 1. Lineare Algebra, Differentialrechnung für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker.* Dortmund : Verlag Martina Furlan, 1995. – ISBN 3–9316–4500–2

[2] Huber, Johannes: *Informationstheorie.* Erlangen : Vorlesungsskript zur gleichnamigen Veranstaltung, 2006

[3] Huber, Johannes: *Nachrichtenübertragung.* Erlangen : Vorlesungsskript zur gleichnamigen Veranstaltung, 2006

[4] Kammeyer, Karl-Dirk: *Nachrichtenübertragung.* Stuttgart : Teubner, 2004. – ISBN 3–519–26142–1

[5] Konstantin Adolfowitsch Semendjajew, Ilja Nikolajewitsch B.: *Taschenbuch der Mathematik.* Thun und Frankfurt am Main : Verlag Harri Deutsch, 2001. – ISBN 3–8171–2005–2

[6] Paul Mühlbauer, Friedrich B.: *Mathematische Formeln und Definitionen.* München : Bayerischer Schulbuchverlag, 1998. – ISBN 3–7627–3261–X

Index